Сопряженные задачи для уравнения теплопроводности

Лектор: д.ф.м.н., профессор
Темирбеков Н.М.

Рассмотрим сначала следующую нестационарную задачу:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f(t, x), 0 < t \leq T, 0 < x < 1, (7.1)$$
$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, 1) = 0, \varphi(0, x) = g(x),$$

решение φ задачи (7.1) достаточно гладкое, непрерывно дифференцируемо по t на [0,T] и дважды непрерывно дифференцируемо по x на [0,1].

Задачу (7.1) - основной или невозмущенной задачей.

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = f^*(t,x), 0 \leq t < T, 0 < x < 1,$$

$\varphi^*(t,0) = \varphi^*(t,1) = 0, \varphi^*(T,x) = g^*(x),$ (7.2)

где функции f^*, g^* пока не определены. Пусть $f^* \in L_2\big((0,T) \times (0,1)\big), g^* \in L_2(0,1)$.

$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^1 \varphi^* \varphi dx\right) dt + \int_0^T \left[\int_0^1 \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\varphi^* + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2}\varphi\right) dx\right] dt = \int_0^T \left[\int_0^1 (f\varphi^* - f^*\varphi) dx\right] dt$ (7.3)

$\int_0^1 g^*(x)\varphi_T(x) dx - \int_0^1 \varphi_0^*(x) g(x) dx = \int_0^T \left[\int_0^1 (f\varphi^* - f^*\varphi) dx\right] dt,$ (7.4)

Где

$$\varphi_T(x) = \varphi(T,x) = 0, \varphi_0^*(x) = \varphi^*(0,x).$$

$J = \int_0^1 g^*(x)\varphi_T dx + \int_0^T \left(\int_0^1 f^*(t,x)\varphi(t,x) dx\right) dt,$ (7.5)

где g^*, φ^* - заданные функции.

$J = \int_0^1 \varphi_0^*(x) g(x) dx + \int_0^T \left(\int_0^1 f(t,x)\varphi^*(t,x) dx\right) dt.$ (7.6)

Пример. Пусть

$$f(t,x)=\sqrt[4]{1+t^{2/3}e^{-t}}sin2\pi x, g(x)=2sin\pi x+sin3\pi x;$$

Тогда основная задача (7.1) примет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\sqrt[4]{1+t^{\frac{2}{3}}e^{-t}}sin2\pi x, 0<t\le T, 0<x<1, (7.7)$$

$$\varphi(t,0)=\varphi(t,1)=0, \varphi(0,x)=2sin\pi x+sin3\pi x.$$

Предположим, что нам требуется вычислить значение не самого решения φ, а функционала от этого решения вида

$$J=\int_0^1 sin\pi x\varphi(T,x)dx. (7.8)$$

Для вычисления J по формуле (7.8) необходимо знать значение решения $\varphi(t,x)$ задачи (7.7) при $t = T$, которое трудно найти в силу сложного вида функций f и g. Воспользуемся для этого формулой (7.6).

Прежде всего запишем (7.8) в виде (7.5), где нужно положить

$$g^*(x) = sin\pi x, \varphi^*(t,x) \equiv 0. \quad (7.9)$$

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = 0, 0 \leq t < T,\ \ 0 < x < 1, \quad (7.10)$$

$$\varphi^*(t,0) = \varphi^*(t,1) = 0,\ \varphi^*(T,x) = sin\pi x.$$

$$\varphi^*(t,x) = e^{\pi^2(t-T)} sin\pi x \quad (7.11)$$

$$J = \int_0^1 e^{-\pi^2 T} sin\pi x(2sin\pi x +$$

Пример. Пусть

$$f(t,x) = (1 + 4\pi^2 t) sin2\pi x, g(x) = 0.$$

Тогда основная задача примет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = (1 + 4\pi^2 t) sin2\pi x, \ (7.17)$$

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,1) = 0, \varphi(0,x) = 0.$$

В качестве функционала J из (7.5) выберем следующий:

$$J = \int_0^1 sin\pi x\varphi(T,x)dx; \ (7.18)$$

Здесь

$$g^*(x) = sin\pi x, f^*(t,x) \equiv 0.$$

решение задачи (7.17); оно имеет вид

$$\varphi(t,x) = tsin2\pi x. \ (7.19)$$

$$J = T\int_0^1 sin\pi x x sin2\pi x dx = 0; \ (7.20)$$

Возмущенная задача

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial t}-\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}=(1+4\pi^2 t)sin2\pi x,\ \ (7.21)$$

$$\varphi'(t,0)=\varphi'(t,1)=0,\ \varphi'(0,x)=e^{\pi^2 T}sin^2\pi x.$$

Нам следует положить $\delta f\ \equiv 0, \delta g=e^{\pi^2 T}sin\pi x$. Тогда из (7.18) и (7.16) получаем

$$J'=J+\delta J=\delta J=\int_0^1\varphi^*\delta g dx=\int_0^1\varphi_0^*(x)e^{\pi^2 T}sin\pi x dx,\ (7.22)$$

Где $\varphi_0^*(x)=\varphi^*(0,x)$, а $\varphi^*\ (t,x)$ - решение сопряженной задачи

$$-\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}-\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2}=0,\ (7.23)$$

$$\varphi^*(t,0)=\varphi^*(t,1)=0,\ \varphi^*(T,x)=sin\pi x.$$

решение

$$\varphi^*(t,x)=e^{\pi^2(t-T)}sin\pi x.\ (7.24)$$

$$J'=\int_0^1 e^{-\pi^2 T}sin\pi x e^{\pi^2 T}\ sin\pi x dx=\int_0^1 sin^2\pi x dx=\frac{1}{2}.\ (7.25)$$

Рассмотрим нестационарную задачу вида

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t} + A\varphi = f \text{ в } (0,T] \times \Omega, (7.26)$$

$$\varphi = g, \text{ при } t = 0,$$

Где A – линейный оператор, $\varphi(t,x)$ для каждого t принадлит некоторому множеству функций $D(A)$ с областью определения $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ (n$\geq$ 1). Функции $f(t,x), g(x)$ для каждого $t \in [0,T]$ предположим квадратично суммируемыми по x на Ω принадлежащими вещественному гильбертову пространству $H = L_2(\Omega)$, в котором задано обычное скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$.

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t} + A\varphi = f, \text{в } (0,T] \times \Omega, (7.26)$$

$$\varphi = g, \text{при } t = 0,$$

Где A – линейный оператор, $\varphi(t, x)$ для каждого t принадлежит некоторому множеству функций $D(A)$ с областью определения $\Omega \subset R^n$ $(n \geq 1)$. Функции $f(t, x), g(x)$ для каждого $t \in (0, T]$ предположим квадратично суммируемыми по x на Ω принадлежащими вещественному гильбертову пространству $H = L_2(\Omega)$, в которому задано обычное скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$.

сопряжённая задача вида

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + A^* \varphi^* = f^*, \text{в } (0, T] \times \Omega, \ (7.27)$$

$$\varphi^* = g^*, \text{при } t = T,$$

Где функции f^*, g^* пока не определены, A^* -оператор, сопряженный к A, удовлетворяющий для каждого t тождеству Лагранжа

$(A\varphi, \varphi^*) = (\varphi, A^*\varphi^*), \varphi \in D(A), \varphi^* \in D(A^*)$. (7.28)

$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\varphi^*, \varphi)dt + \int_0^T [(A\varphi, \varphi^*) - (\varphi, A^*\varphi^*)]dt = \int_0^T [(f, \varphi^*) - (f^*, \varphi^*)]dt$. (7.29)

$(g, \varphi_T) - (g, \varphi_0^*) = \int_0^T [(f, \varphi^*) - (f^*, \varphi)]td,$ (7.30)

Где

$$\varphi_T = \varphi(T, x), \varphi_0^* = \varphi^*(0, x).$$

$J = (g^*, \varphi_T) + \int_0^T (f^*, \varphi)dt,$ (7.31)

Где f^*, g^* - некоторые заданные функции. Используя соотношение (7.30), мы можем получить другую формулу для вычисления. Из (7.30), (7.31) имеем

$J = (g, \varphi_0^*) + \int_0^T \left(f \quad , \varphi^*\right)dt,$ (7.32)

$f' = f + \delta f, g' = g + \delta g.$

возмущенная задача:

$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + A\varphi' = f'$ в $(0, T] \times \Omega,$ *(7.33)*

$\varphi' = g'$, при $t = 0$

$$\varphi'(t,x) = \varphi(t,x) + \delta\varphi(t,x).$$

$J' = J + \delta J,$ (7.34)

Где

$\delta J = (\delta g, \varphi_0^*) + \int_0^T (\delta f, \varphi^*) dt$ (7.35)

Или, с другой стороны,

$\delta J = \left(g^*, \delta\varphi_T\right) + \int_0^T (f^*, \delta\varphi\quad) dt$ (7.36)

$\delta J = (\delta g, \varphi_0^*) + \int_0^T (\delta f, \varphi^*) dt + \int_0^T (\delta A\varphi', \varphi^*) dt$ (7.37)

$\delta J = (\delta g, \varphi_0^*) + \int_0^T (\delta f, \varphi^*\ ) dt - \int_0^T (\delta A\varphi, \varphi^*) dt$ (7.38)

Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.